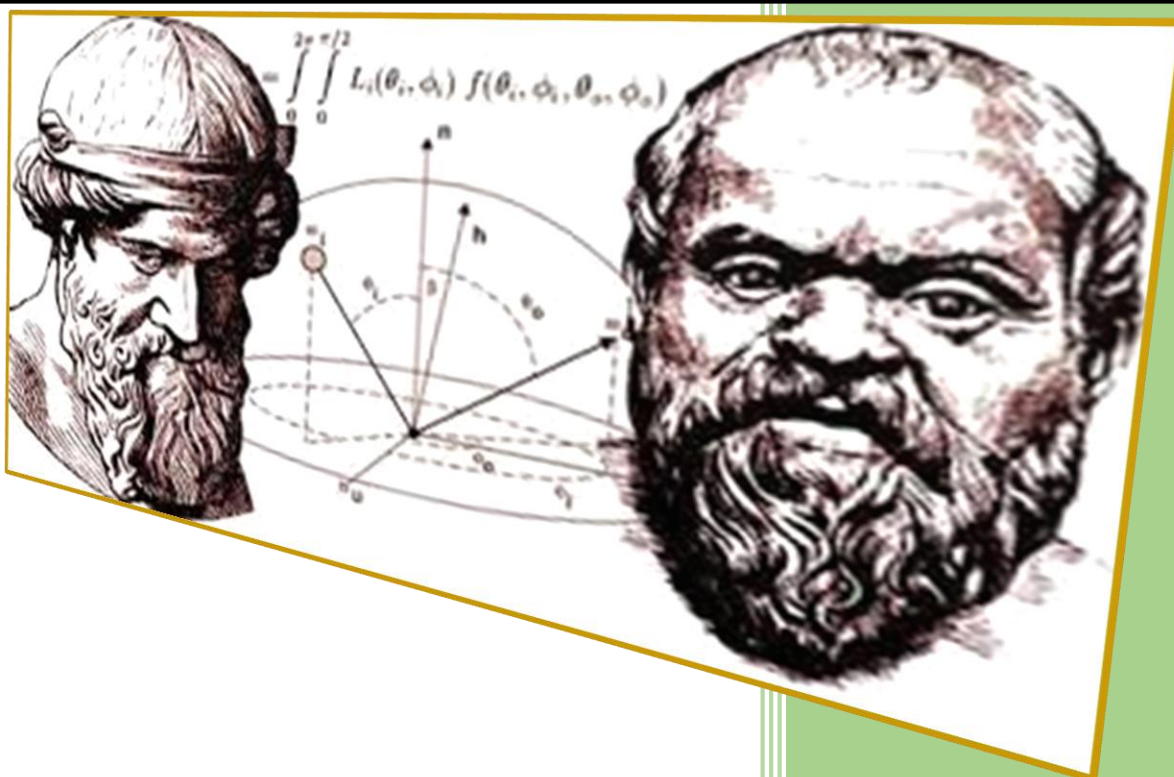


Σάκης Χιονίδης

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού



Στοιχεία Θεωρίας
Επισημάνσεις-Συμβουλές

ΟΡΙΣΜΟΣ

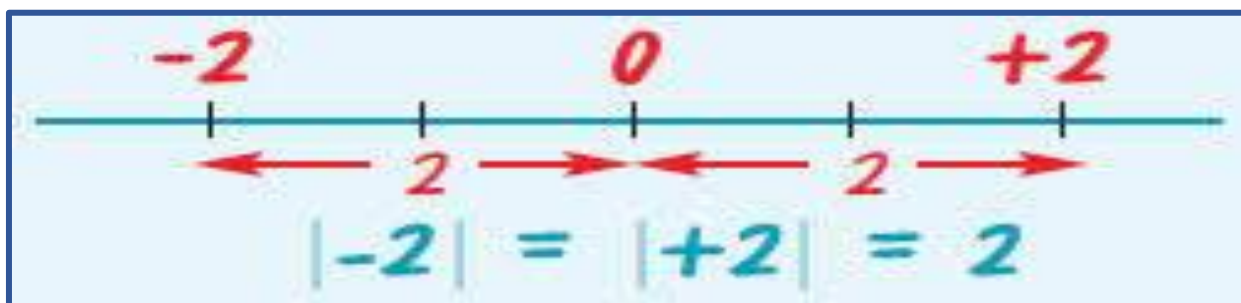
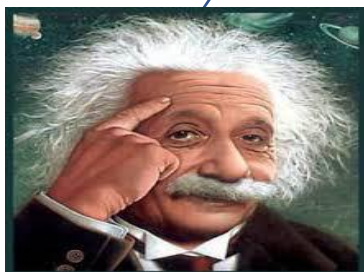
Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού a συμβολίζεται με $|a|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$



Μαθαίνω τον ορισμό πολύ καλά

Γεωμετρική ερμηνεία: Είναι η απόσταση του σημείου A , που παριστάνει τον αριθμό a πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, από την αρχή των αξόνων O .

**Επισήμανση-
Συμβουλή 1η**

Σε αρκετές περιπτώσεις θέλω να «απαλλαγώ» από τα απόλυτα. Τι κάνω τότε;

✚ Βασικό: Με ενδιαφέρει το πρόσημο που έχει το περιεχόμενο του, οπότε αν έχω το απόλυτο $|\bullet|$, η ερώτηση μας είναι: $\bullet > 0$ ή $\bullet < 0$.

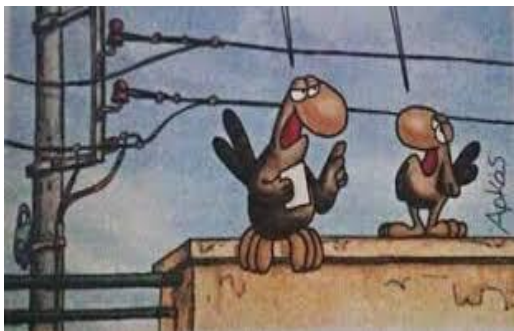
✚ Αν $\bullet > 0$, τότε $|\bullet| = (\bullet)$, δηλαδή «καμπυλώνουμε» το απόλυτο, το κάνουμε παρένθεση και διατηρούμε το περιεχόμενο του, δεν αλλάζουμε κάτι.

✚ Αν $\bullet < 0$, τότε $|\bullet| = (-\bullet)$, δηλαδή πάλι «καμπυλώνουμε» το απόλυτο, το κάνουμε παρένθεση, αλλά τώρα μέσα στην παρένθεση **αλλάζουμε** όλα τα πρόσημα (παίρνουμε τον αντίθετο του περιεχόμενου του).

ΧΡΗΣΙΜΑ:

- $A^{2\kappa} + B^{2\lambda} + \Gamma^{2\mu} + \dots \geq 0$
- $-A^{2\kappa} - B^{2\lambda} - \Gamma^{2\mu} - \dots \leq 0$
- $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \rightarrow (\alpha + \beta)^2 \geq 0$
- $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \rightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0$
- $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)^2$

Αλλά και άλλα πολλά.....που εμπλέκονται θέματα διάταξης.



Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής, έχουμε ότι: $|A| \geq 0$ και το ίσον ισχύει όταν $A=0$, δηλαδή $|A|=0$ αν και μόνο αν $A=0$.

Η παραπάνω γενικεύεται και για περισσότερους όρους:

$$|A| + |B| + |\Gamma| + |\Delta| \geq 0$$

Και $|A| + |B| + |\Gamma| + |\Delta| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ και } B =$

$0 \text{ και } \Gamma = 0 \text{ και } \Delta = 0$ (προσέξτε το και)

Επίσης $|A| = |-A|$ (οι αντίθετοι βέβαια απέχουν την ίδια απόσταση από το 0)

Το παραπάνω μας δίνει την δυνατότητα, αν χρειαστεί, να αλλάζουμε όλα τα πρόσημα μέσα σε ένα απόλυτο: $|- \alpha + \beta + \gamma - \delta| = |\alpha - \beta - \gamma + \delta|$.

ΑΛΛΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ: $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$ και $|\alpha| = \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 0$, ενώ
 $|\alpha| = -\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 0$.

Τα παραπάνω βρίσκουν ενιαία έκφραση στην $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$.

ΚΑΤΙ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: $|A|^2 = A^2$, γιατί; Θέλουμε να δείξουμε μια ισότητα.

Παίρνοντας το πρώτο μέλος της, έχουμε $|A|^2 = |A| \cdot |A|$. Δεν ξέρουμε το περιεχόμενο A των δύο αυτών απόλυτων τι πρόσημο έχει, οπότε διακρίνουμε περιπτώσεις για το A : αν $A \geq 0$, τότε $|A| = A$ και έτσι $|A| \cdot |A| = A \cdot A = A^2$.

Αν $A < 0$, τότε $|A| = -A$ και έτσι $(-A) \cdot (-A) = A^2$. Έτσι σε κάθε περίπτωση βρήκαμε το δεύτερο μέλος της ζητούμενης: το A^2 .

Η ιδιότητα με το τετράγωνο γενικεύεται για οποιαδήποτε **άρτια** τάξη:

$$|A|^{2\kappa} = A^{2\kappa} \text{ και αυτό γιατί } (|A|^2)^\kappa = (A^2)^\kappa = A^{2\kappa}.$$

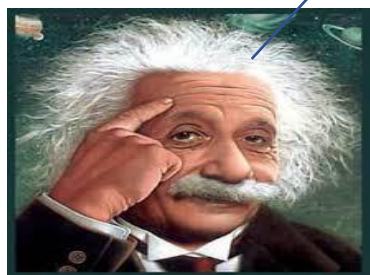
Θα αποδείξουμε μια άλλη χρήσιμη ιδιότητα των απολύτων: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

Ένας τρόπος για να αποδείξουμε μια ισότητα είναι να πάρουμε την ζητούμενη και διατηρώντας ισοδυναμίες να πάρουμε μια αληθής σχέση:

$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow (|\alpha\beta|)^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha\beta)^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \Leftrightarrow \alpha^2 \beta^2 = \alpha^2 \beta^2 \text{ που ισχύει.}$$

Γενικεύουμε και για περισσότερους παράγοντες:

$$|\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot |\alpha_3| \dots |\alpha_n|$$



Επισήμανση- Συμβουλή 2η

Πολλές φορές όταν παραγοντοποιείται το περιεχόμενο ενός απόλυτου πραγματοποιούμε αυτήν την παραγοντοποίηση, γιατί τότε το απόλυτο «πηγαίνει» σε κάθε παράγοντα. Επίσης, αν μας βολεύει, είδαμε ότι μπορούμε να αλλάζουμε τα πρόσημα μέσα σε ένα απόλυτο. Δύο κινήσεις που μας βοηθάνε στην εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων.

Όταν μέσα σε ένα απόλυτο έχουμε κλάσμα, το απόλυτο πηγαίνει σε κάθε έναν όρο και σε αριθμητή και σε παρονομαστή: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$. Η απόδειξη της, όπως και η προηγούμενη, γίνεται με «τετραγωνισμό»: υψώνουμε κάθε μέλος μέλος της σχέσης στο τετράγωνο.....

Τι γίνεται όταν έχουμε δύναμη μέσα σε απόλυτο;

Όταν ο εκθέτης είναι φυσικός >1 , τότε $|\alpha^n| = |\alpha\alpha\alpha \dots \alpha| = |\alpha||\alpha||\alpha| \dots |\alpha| = |\alpha|^n$ ΔΗΛΑΔΗ: $|\alpha^n| = |\alpha|^n$ (ο εκθέτης βγαίνει έξω από το απόλυτο).



Επισήμανση- Συμβουλή 3η

Ένας τρόπος επίσης για να διώχνουμε απόλυτα είναι ο τετραγωνισμός, δηλαδή η ύψωση στο τετράγωνο κάθε μέλος μιας σχέσης. Βέβαια, αυτό θα εξαρτηθεί και από την μορφή που θα έχει αυτή η σχέση:

- + Αν είναι της μορφής $|\square| = |\bullet|$ ή $|\square| \leq |\bullet|$, τότε σίγουρα τετραγωνίζουμε (αν ένα απόλυτο έχει τετράγωνο, το απόλυτο φύγει).
- + Αν τα δύο μέλη της σχέσης έχουν περισσότερους όρους, το σκεφτόμαστε, γιατί θα μπλέξουμε μεπράξεις.

Αν έχουμε την $|x| = 4$, τότε ποιος μπορεί να είναι ο x ; $x=4$ ή $x=-4$.

Αν $|x| = -9$, τότε δεν υπάρχει αριθμός x που να ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα, δηλαδή η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη.

ΓΕΝΙΚΕΥΟΝΤΑΣ:

Θα δείξουμε ότι αν $\theta > 0$, τότε $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$

Ξεκινάμε με την σχέση $|x| = \theta$. Για να διώξουμε το απόλυτο τετραγωνίζουμε:

$$|x|^2 = \theta^2 \Leftrightarrow x^2 = \theta^2 \Leftrightarrow x^2 - \theta^2 = 0 \Leftrightarrow (x + \theta)(x - \theta) = 0 \Leftrightarrow x + \theta = 0 \text{ ή } x - \theta = 0$$

Οπότε $x = \theta$ ή $x = -\theta$.

ΕΠΙΣΗΜΝΩΣΗ: Αριθμοί που έχουν ίσα απόλυτα, θα είναι ίσοι ή αντίθετοι:

$$|\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -\beta$$

ΚΑΠΟΙΑ ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΤΑΞΗΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

$$\checkmark |x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta \text{ με } \theta > 0$$

(απόλυτο μικρότερο από θετικό αριθμό $\rightarrow$ διπλό ανισοτικό σύμβολο)

Η απόδειξη πάλι με τετραγωνισμό:

$$|x|^2 < \theta^2 \Leftrightarrow x^2 < \theta^2 \Leftrightarrow (x + \theta)(x - \theta) < 0. \text{ Ένα γινόμενο αρνητικό,}$$

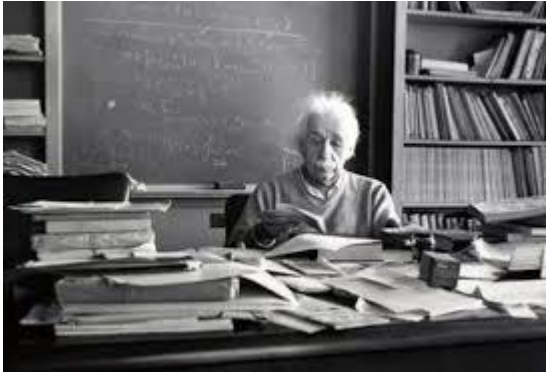
οπότε ένας παράγοντας θετικός και ο άλλος αρνητικός. Επειδή

$x + \theta > x - \theta$, σίγουρα $x + \theta > 0$ και $x - \theta < 0$, οπότε $x > -\theta$ και $x < \theta$. Έτσι :

$-\theta < x < \theta$ η ζητούμενη.

✓ $|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta$ ή $x < -\theta$ με $\theta > 0$.

Η απόδειξη στην ίδια φιλοσοφία με την προηγούμενη.....Γινόμενο θετικό σημαίνει οι παράγοντες ομόσημοι και οι δύο θετικοί ή και οι δύο αρνητικοί.....κλπ.



Τριγωνική ανισότητα (ή και ιδιότητα)

Μια ιδιότητα με ΙΣΤΟΡΙΑ

Όταν μέσα σε απόλυτο έχουμε γινόμενο, το γινόμενο «σπάει» και πηγαίνει σε κάθε παράγοντα. Το ίδιο δεν συμβαίνει όταν έχουμε άθροισμα ή διαφορά.

Με αυτό το σπάσιμο προκύπτει παράσταση που είναι μεγαλύτερη ή ίση της αρχικής. ΔΗΛΑΔΗ:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Η παραπάνω είναι μια ανισοϊσότητα, το ίσον θα δείξουμε ότι ισχύει στην περίπτωση που $xy > 0$, δηλαδή όταν οι x, y είναι ομόσημοι.

Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Σχέση με απόλυτα, οπότε τετραγωνισμός και με ισοδυναμίες παίρνουμε μια αληθή πρόταση.

$$\begin{aligned} |x + y| \leq |x| + |y| &\Leftrightarrow |x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \Leftrightarrow (x + y)^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 \Leftrightarrow xy \leq |xy| \end{aligned}$$

Που ισχύει (είδαμε ότι ένα απόλυτο είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το περιεχόμενο του, δηλαδή $|x| \geq x$ και μάλιστα το ίσον ισχύει όταν το περιεχόμενο του είναι μη αρνητικό). Έτσι $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy > 0$.

Θα πειράξουμε λίγο την τριγωνική ανισότητα: ισχύει και:

$$|x - y| \leq |x| + |y|$$

Γιατί $|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$

Η πλήρης μορφή της τριγωνικής ανισότητας

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$



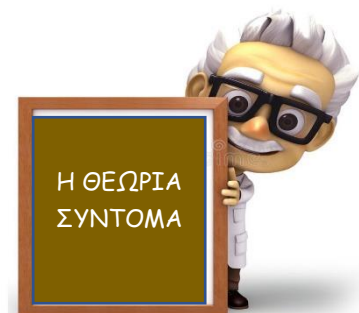
Η απόδειξη του «αριστερού» μέρους $||x| - |y|| \leq |x + y|$ γίνεται πάλι με τετραγωνισμό και η ισότητα $||x| - |y|| = |x + y|$ ισχύει αν και μόνο αν οι $x, y < 0$, δηλαδή είναι ετερόσημοι.



Επισήμανση-
Συμβουλή 4η

Η ύπαρξη αθροίσματος (ή διαφοράς) μέσα σε απόλυτο μαζί με ανισοτικό σύμβολο $\longrightarrow$ τριγωνική ανισότητα.

Συνοπτικά παρακάτω
παρουσιάζουμε τα βασικά
σημεία της θεωρίας



Η ΘΕΩΡΙΑ
ΣΥΝΤΟΜΑ

Ορισμός της απόλυτης τιμής

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού a συμβολίζεται με $|a|$ και

ορίζεται από τον τύπο:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

💣 $|A| \geq 0$ και το ίσον ισχύει όταν $A=0$, δηλαδή $|A|=0$ αν και μόνο αν $A=0$.

💣 Η παραπάνω γενικεύεται και για περισσότερους όρους:

$$|A| + |B| + |Γ| + |Δ| \geq 0$$

Και $|A| + |B| + |Γ| + |Δ| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ και $B = 0$ και $Γ = 0$ και $Δ = 0$ (προσέξτε το και).

💣 $|A| = |-A|$

💣 $|α| \geq α$ και $|α| \geq -α$ και $|α| = α \Leftrightarrow α \geq 0$, ενώ
 $|α| = -α \Leftrightarrow α \leq 0$.

Τα παραπάνω βρίσκουν ενιαία έκφραση στην $-|α| \leq α \leq |α|$.

💣* $|A|^2 = A^2$ Η ιδιότητα με το τετράγωνο γενικεύεται για οποιαδήποτε άρτια τάξη: $|A|^{2κ} = A^{2κ}$

💣 $|α \cdot β| = |α| \cdot |β|$ Γενικεύουμε και για περισσότερους παράγοντες:

$$|α_1 α_2 α_3 \dots α_n| = |α_1| \cdot |α_2| \cdot |α_3| \dots |α_n|$$

💣 Όταν ο εκθέτης είναι φυσικός >1 : $|α^n| = |α|^n$ (ο εκθέτης βγαίνει έξω από το απόλυτο).

💣 $\left| \frac{α}{β} \right| = \frac{|α|}{|β|}$

💣 αν $θ > 0$, τότε $|χ| = θ \Leftrightarrow χ = θ$ ή $χ = -θ$

$$\bullet^* \quad |\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -\beta$$

$$\bullet^* \quad |x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta \text{ με } \theta > 0$$

$$\bullet^* \quad |x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta \text{ ή } x < -\theta \text{ με } \theta > 0.$$

$$\bullet^* \quad ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y| \quad (\text{Τριγωνική ανισότητα}).$$

Η ισότητα $||x| - |y|| = |x + y|$ ισχύει αν και μόνο αν οι $x, y < 0$, δηλαδή είναι ετερόσημοι.

Η ισότητα $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy > 0$, δηλαδή όταν οι x, y ομόσημοι.

ΘΑ ΑΣΧΟΛΗΘΟΥΜΕ ΤΩΡΑ ΜΕ ΤΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥΣ

Είναι:

$$\bullet^+ \quad x \in [\alpha, \beta] \text{ ή } \alpha \leq x \leq \beta \text{ (κλειστό διάστημα } [\alpha, \beta] \text{)}$$

$$\bullet^+ \quad x \in (\alpha, \beta) \text{ ή } \alpha < x < \beta \text{ (ανοιχτό διάστημα } (\alpha, \beta) \text{)}$$

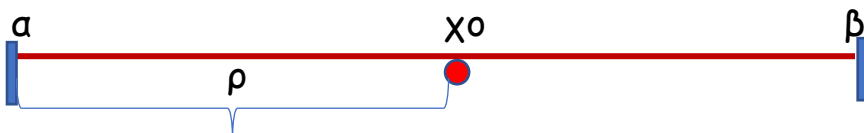
$$\bullet^+ \quad x \in (\alpha, \beta] \text{ ή } \alpha < x \leq \beta \text{ (ημιάνοιχτο διάστημα)}$$

$$\bullet^+ \quad x \in [\alpha, \beta) \text{ ή } \alpha \leq x < \beta \text{ (ημιάνοιχτο διάστημα)}$$

ΜΗΚΟΣ του $[a, b]$ είναι το $\ell = b - a$

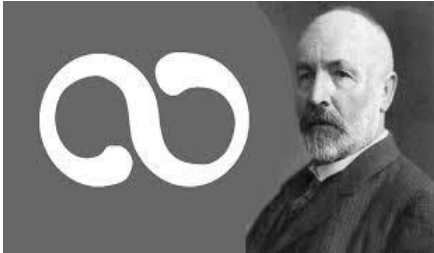
ΑΠΟΣΤΑΣΗ των αριθμών a και b είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους, δηλαδή $|a - b|$ ή $|b - a|$ και την συμβολίζουμε με $d(a, b) = |a - b| = |b - a|$

ΚΕΝΤΡΟ του $[a, b]$ είναι το $x_0 = \frac{a+b}{2}$ και αντιστοιχεί στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τους a και b .



ΑΚΤΙΝΑ του διαστήματος $[a,b]$ είναι η $\rho = \frac{\beta - \alpha}{2}$

Αν έχουμε τα διαστήματα (a,b) , $[a,b)$, $(a,b]$ τα παραπάνω στοιχεία είναι τα ίδια.

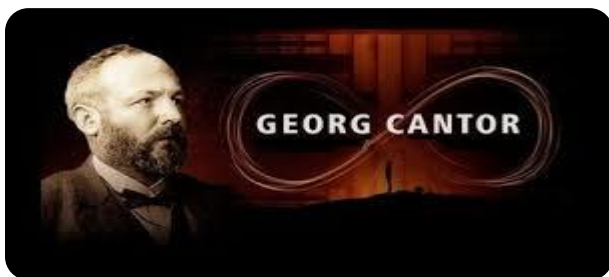


ΘΑ ΜΙΛΗΣΟΥΜΕ ΚΑΙ ΓΙΑ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ:

- $x \in (\beta, +\infty)$ ή $x > \beta$
- $x \in [\beta, +\infty)$ ή $x \geq \beta$
- $x \in (-\infty, \alpha)$ ή $x < \alpha$
- $x \in (-\infty, \alpha]$ ή $x \leq \alpha$

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- ☯ $|x| \leq \theta$ ή $-\theta \leq x \leq \theta$ ή $x \in [-\theta, \theta]$ (διάστημα)
- ☯ $|x| \geq \theta \Leftrightarrow (x \geq \theta \text{ ή } x \leq -\theta)$ ή $x \in (-\infty, -\theta] \cup [\theta, +\infty)$ (ένωση διαστημάτων).



ΧΡΗΣΙΜΕΣ
ΣΥΜΒΟΥΛΕΣ ΓΙΑ ΤΙΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1..... ΘΕΛΩ ΝΑ ΒΓΑΛΩ ΑΠΟΛΥΤΟ ΤΟΤΕ:

Με ενδιαφέρει
το περιεχόμενο
του απολύτου
 $|A|$

Αν $A > 0$, τότε $|A| = A$

Αν $A < 0$, τότε $|A| = -A$

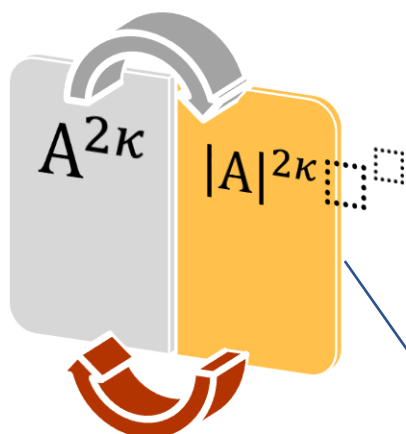
Το απόλυτο
το βγάζω, τότε το «καμπυλώνω και το κάνω παρένθεση»

3..... ΠΩΣ ΧΕΙΡΙΖΟΜΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

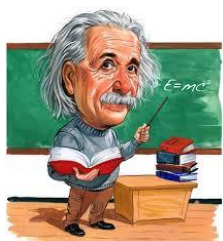
Κάνουμε παραγοντοποίηση στο περιεχόμενο του
απόλυτου

Αν βολεύει αλλάζουμε όλα τα πρόσημα μέσα στο
απόλυτο

4.....ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΟΤΕ



Ανάλογα με την περίπτωση στις άρτιες δυνάμεις μπορώ να βάλω ή να βγάλω απόλυτο



ΕΠΙΣΗΣ: $|X^N| = |X|^N$ δηλαδή ο εκθέτης μιας δύναμης «δραπετεύει» από το απόλυτο.

5.....ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $|A| = |B|$ ή $|A| < |B|$

Σίγουρα αντιμετωπίζονται με **ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟ**.

6.....ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΑΠΟΛΥΤΑ , ΤΟΤΕ

το περιεχόμενο τους
τι πρόσημο έχουν

Αν δεν μπορούμε να
συμπεράνουμε το πρόσημο,
διακρίνουμε περιπτώσεις

Τετραγωνίζουμε,
υψώνουμε κάθε μέλος
στο τετράγωνο

7.....ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $|A| + |B| + |Γ| = 0$ ή $|A| + |B| + |Γ| \leq 0$

Από μία τέτοια σχέση μπορούμε να «παράγουμε» περισσότερες..... γιατί:

$$|A| + |B| + |Γ| = 0 \Leftrightarrow A=0 \text{ και } B=0 \text{ και } Γ=0$$

$$|A| + |B| + |Γ| \leq 0 \text{ , οπότε } |A| + |B| + |Γ| = 0 \text{ , άρα}$$

$$A=0 \text{ και } B=0 \text{ και } Γ=0.$$

8.....ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΟΠΟΙΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΜΕ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

Παράδειγμα: Να γραφεί χωρίς απόλυτα η παράσταση $|x - 3| - |4 - x|$.

Λύση:

- ✓ Καταρχήν, μηδενίζουμε το περιεχόμενο κάθε απόλυτου: $x-3=0$, άρα $x=3$ και $4-x=0$, οπότε $x=4$.
- ✓ Τοποθετούμε τους αριθμούς αυτούς σε μία ευθεία και κατασκευάζουμε ένα πίνακα που μας δίνει τα πρόσημα των περιεχομένων των απόλυτων

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x-3$		-	○	+		+	
$4-x$		+		+	○	-	

Στον παραπάνω πίνακα ορίζονται τα διαστήματα (στήλες):

- ☉ $x \in (-\infty, 3]$, τότε η παράσταση γίνεται $(-x+3)-(4-x)=-x+3-4+x=-1$
- ☉ $x \in (3,4]$, τότε έχουμε την $(x-3)-(4-x)=x-3-4+x=2x-7$
- ☉ $x \in (4, +\infty)$, και έχουμε $(x-3)-(-4+x)=x-3+4-x=1$

Μπορούμε με κομψό τρόπο να παρουσιάσουμε τα παραπάνω:

$$\text{ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ} = \begin{cases} -1 & \text{αν } x \in (-\infty, 3] \\ 2x - 7, & \text{αν } x \in (3, 4] \\ 1, & \text{αν } x \in (4, +\infty) \end{cases}$$

9..... ΥΠΟΨΙΕΣ ΓΙΑ ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ



Η ΠΛΗΡΗΣ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΙΚΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

10.....ΘΕΜΑΤΑ ΠΟΥ ΣΧΕΤΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕ
ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ Η ΕΝΩΣΗ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ-
ΑΠΟΣΤΑΣΗ-ΑΠΟΛΥΤΑ

☛ Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, τότε:

$$\checkmark |x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

$$\checkmark |x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty)$$

☛ Μας δίνουν ένα διάστημα και θέλουμε να το γράψουμε με απόλυτο, τότε:

✓ Βρίσκουμε το κέντρο του διαστήματος x_0 .

✓ Βρίσκουμε την ακτίνα του διαστήματος ρ

✓ Αν το διάστημα είναι το $[a, b]$, τότε $x \in [a, b] \Leftrightarrow |x - x_0| \leq \rho$

☛ Μας δίνουν μία ένωση διαστημάτων και ζητείται να γραφεί με απόλυτο, τότε:

Υποθέτοντας ότι αυτή η ένωση είναι η $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$, παίρνουμε το διάστημα $[a, b]$ (που είναι το συμπληρωματικό της ένωσης) και δουλεύοντας όπως στην προηγούμενη περίπτωση για το διάστημα, έχουμε μία σχέση της μορφής $|x - x_0| \leq \rho$, και η απάντησή μας στο ερώτημα είναι η $|x - x_0| > \rho$

11.....ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΑΠΟΛΥΤΩΝ=ΘΕΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ, ΤΟΤΕ

☯ Η με την περίπτωση 8 (διάκριση περιπτώσεων με τον πίνακα προσήμων)

☯ Είτε ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ, παίρνοντας τους αριθμούς που εμφανίζονται στα απόλυτα πάνω σε ευθεία και γράφοντας αποστάσεις με την $d(a, b) = |a - b| = |b - a|$